جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
یازدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۷۲

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۸۰	۶	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

مسأله‌های مرحله‌ی اول یازدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش‌آموزان کشور، آذر ماه ۱۳۷۲

۱- اگر تفاضل مکعبات دو عدد صحیح و متوالی، توان دوم یک عدد باشد، نشان دهید این عدد برابر حاصل جمع توان دوم دو عدد صحیح و متوالی است.

۲- نقطه‌ی P را درون مثلث ABC اختیار می‌کنیم، خطوط راست BP و CP اضلاع روبرو را به ترتیب در B_1 و C_1 قطع می‌کنند. اگر بدانیم که هم مساحت‌ها و هم محیط‌های دو مثلث PBC_1 و PCB_1 باهم برابرند، آنگاه ثابت کنید P روی نیمساز درونی زاویه‌ی A قرار دارد.

۳- تابع پیوسته‌ی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را به‌گونه‌ای پیدا کنید که برای هر $c\in\mathbb{R}$ معادله‌ی $f(x)=c$ دقیقاً سه جواب داشته باشد.

۴- ثابت کنید معادله‌ی $3x^2+1=4y^3$ در اعداد گویا فقط دارای جواب‌های $x=\pm 1$ و $y=1$ است.

۵- مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن را در نظر می‌گیریم. از نقاط A، B و C خطوط دلخواهی رسم می‌کنیم تا اضلاع و کمان‌های روبرو را به ترتیب در M و M'، N و N' و P و P' قطع کنند. ثابت کنید اگر حاصل عبارت

$$T=\frac{AM'}{MM'}+\frac{BN}{NN'}+\frac{CP'}{PP'}$$

مینیمم شود، آنگاه سه خط مزبور همرس‌اند. سپس نشان دهید $T\geq 12$.

۶- فرض کنید خانواده‌ی $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ که از n مجموعه‌ی متمایز ناتهی تشکیل‌شده است دارای این خاصیت باشد که اجتماع هر دو عضو از $\mathcal{A}$ دوباره عضوی از $\mathcal{A}$ باشد. اگر

$$|A_1|\leq|A_2|\leq\dots\leq|A_n|$$

که $|A_i|$ تعداد اعضای A_i است؛ و $|A_1|\geq 2$، نشان دهید عضوی مانند x وجود دارد که عضو حداقل $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ تا از این مجموعه‌ها است.
($\lceil a \rceil$ یعنی کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی a).

حل مسأله‌های مرحله‌ی اول یازدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی
دانش آموزان کشور، آذرماه ۱۳۷۲

۱- برای $n \in \mathbb{Z}$ فرض کنید $(n+۱)^۳ - n^۳ = k^۲$. درنتیجه k عددی فرد است $(k = ۲m+۱)$ ، ولی داریم

$$(n+۱)^۳ - n^۳ = ۳n^۲ + ۳n + ۱ = k^۲$$

$$۴(۳n^۲ + ۳n + ۱) - ۱ = ۳(۴n^۲ + ۴n + ۱) = ۳(۲n+۱)^۲$$

از طرف دیگر،

$$۴(۳n^۲ + ۳n + ۱) - ۱ = ۴(۲m+۱)^۲ - ۱ = (۴m+۱)(۴m+۳)$$

$۴m+۱$ و $۴m+۳$ نسبت به هم اول‌اند، پس یکی از آن‌ها مربع کامل است ولی $۴m+۳$ هیچ‌گاه مربع کامل نیست، پس $۴m+۱ = (۲t+۱)^۲$. یعنی $۲m+۱ = t^۲ + (t+۱)^۲$.

۲- فرض کنیم دو مثلث $PB_۱C$ و $PCB_۱$ دو مثلثی باشند که دارای مساحت‌ها و محیط‌های مساوی هستند، یعنی $S = S'$ و $۲p = ۲p'$. می‌دانیم که

$$\left.\begin{array}{l} S = pr \\ S' = p'r' \end{array}\right\} \Rightarrow pr = p'r' \Rightarrow r = r'$$

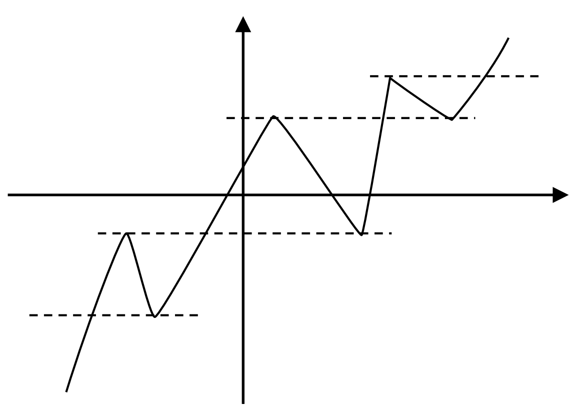
پس دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی PMI و PNJ برابرند درنتیجه $PM = PN$ است.

ولی $PM = p - BC_۱$ و $PN = p' - CB_۱$ و یا $p - BC = p' - CB_۱$ و یا $BC_۱ = CB_۱$. از طرف دیگر

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{۱}{۲} BC_۱ . h \\ S' = \frac{۱}{۲} CB_۱ . h' \end{array}\right\} \Rightarrow h = h'$$

یعنی نقطه‌ی P از دو ضلع AB و AC به یک‌فاصله است. یعنی P روی نیمساز $\angle A$ واقع است.

۳- بدیهی است که باید خط $y = c$ نمودار تابع $y = f(x)$ را دقیقاً در سه‌نقطه قطع کند.
به همین ترتیب $y = f(x)$ را می‌توان از هر دو طرف ادامه داد.



۴- با تبدیل $u=\frac{3x-1}{2}$ نتیجه می‌شود

$$u^2+u+1=3y^3 \Rightarrow (2+u)^3+(1-u)^3=(3y)^3$$

که آخرین قضیه‌ی فرما در حالت $n=3$ است و فقط جواب‌های بدیهی $u=1$ و $u=-2$ وجود دارد. پس

$$\left.\begin{array}{l} u=1 \\ u=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\pm 1, y=1$$

۵- ابتدا توجه می‌کنیم که

$$T=\frac{AM}{MM'}+\frac{BN}{NN'}+\frac{CP}{PP'}+3$$

پس T مینیمم است هرگاه

$$\frac{AM}{MM'}+\frac{BN}{NN'}+\frac{CP}{PP'}$$

مینیمم شود، حال اگر Q پای عمود از M' به BC، M'' وسط کمان BC، Q' پای عمود از M'' به BC و H پای ارتفاع وارد از A به BC باشد، داریم

$$\frac{AM}{MM'}+\frac{AH}{M'Q}\geq\frac{AH}{M''Q'}=\frac{AD}{DM''}$$

پس نتیجه می‌گیریم که T وقتی مینیمم است که خطوط فوق‌الذکر نیمسازهای مثلث باشند. اما وقتی این خطوط نیمسازها باشند (یعنی درواقع ازاینجا به بعد M پای نیمساز است)، داریم

$$\frac{AM}{MM'}+\frac{AM^2}{MM'\times AM}=\frac{AM^2}{BM\times MC}=\frac{AM^2(b+c)^2}{a^2bc}$$

و می‌دانیم

$$\frac{AM}{MM'}=\left(\frac{b+c}{a}\right)^2-1$$

به همین ترتیب

$$\frac{BN}{NN'}=\left(\frac{a+c}{b}\right)^2-1 \qquad , \qquad \frac{CP}{PP'}=\left(\frac{a+b}{c}\right)^2-1$$

پس

$$T=\frac{(b+c)^2}{a^2}+\frac{(a+c)^2}{b^2}+\frac{(a+b)^2}{b^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2}{a^2b^2c^2}}\geq 3\sqrt[3]{\frac{4ab\times 4ac\times 4bc}{a^2b^2c^2}}=12$$

۶- دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) $|A_1| = 1$. فرض کنید $A_1 = \{a\}$ ، تمام مجموعه‌هایی را که شامل عضو a هستند، با S_a و بقیه را با S'_a نشان می‌دهیم. نشان خواهیم داد که $|S_a| > |S'_a|$. به ازای هر $A_i \in S'_a$ می‌توان یک مجموعه در S_a پیدا کرد $(A_i \cup \{a\})$ و غیر از آن‌ها، A_1 نیز در S_a است.

ب) $|A_1| = 2$. فرض کنید $A_1 \cup \{a,b\}$ و

$$S_{ab} = \text{مجموعه‌هایی که شامل } a \text{ و } b \text{ هستند}$$

$$S_a = \text{مجموعه‌هایی که فقط شامل } a \text{ هستند}$$

$$S_b = \text{مجموعه‌هایی که فقط شامل } b \text{ هستند}$$

$$S'_{ab} = \text{مجموعه‌هایی که شامل هیچ‌یک از } a \text{ و } b \text{ نیستند}$$

به هر $A_i \in S'_{ab}$ مجموعه‌ی $A_i = \{a,b\}$ در S_{ab} را متناظر می‌کنیم، پس

$$|S_{ab}| \geq |S'_{ab}|$$

پس اگر مثلاً $|S_a| \geq |S_b|$ باشد آنگاه

$$|S_{ab}| + |S_a| \geq |S_b| + |S'_{ab}|$$

درنتیجه تعداد آن‌هایی که شامل a هستند $|S_{ab}| + |S_a|$ بزرگ‌تر یا مساوی نصف تعداد کل است.